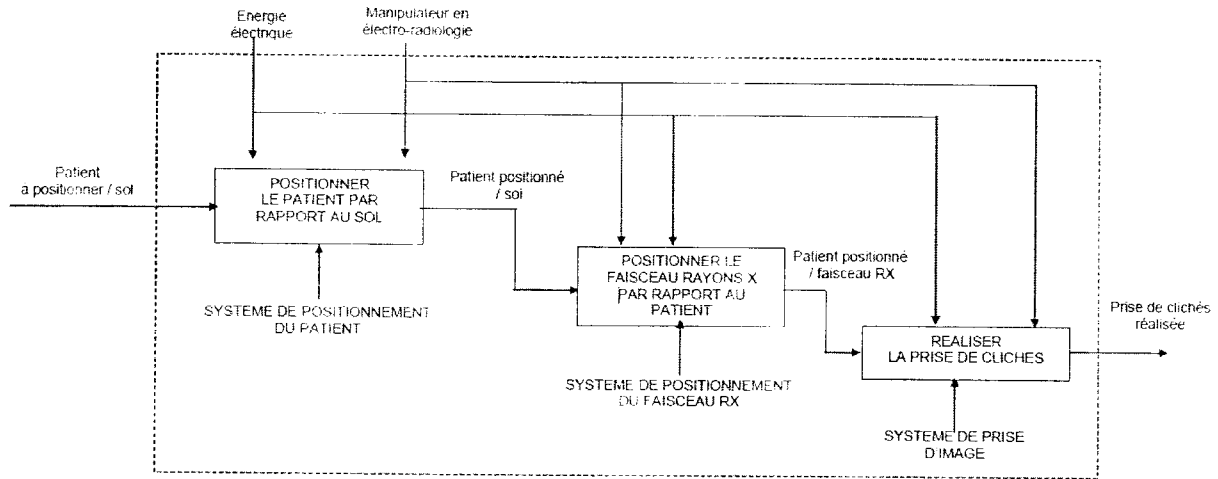


# Corrigé SI - CNC 2013

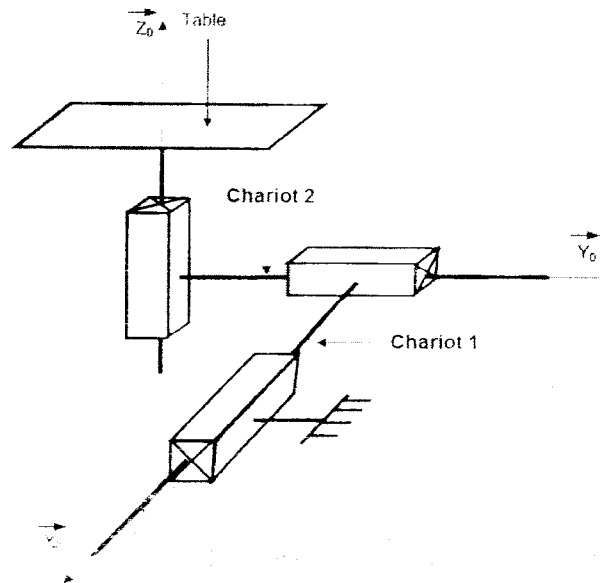
MP - PSI

## Partie I

Q1 -

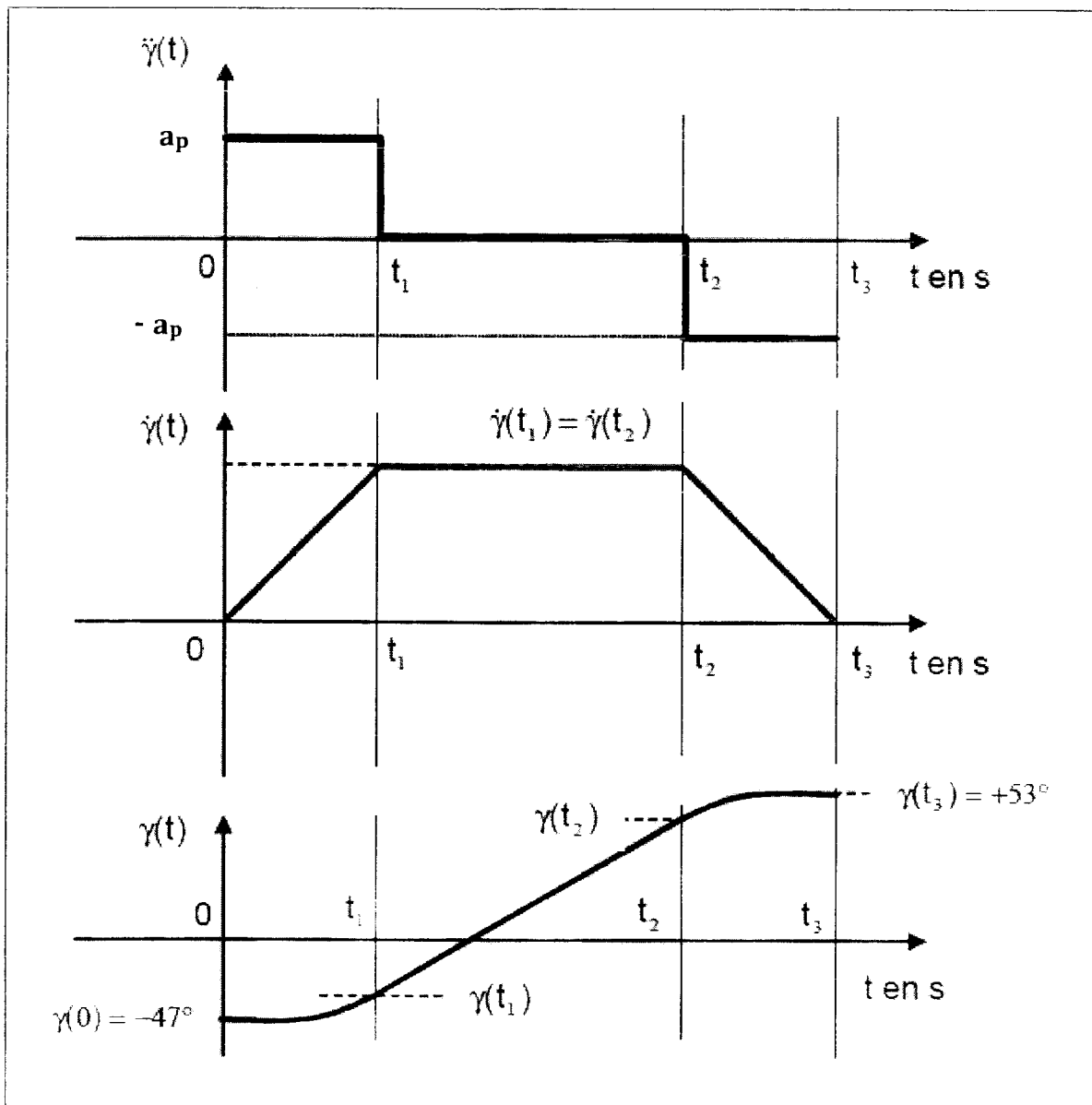


Q2 -



## Partie II

Q3 –



Q4 –

Calcul de  $t_1$  :

Nous avons  $a_p = \frac{\dot{\gamma}(t_1)}{t_1} \implies t_1 = \frac{\dot{\gamma}(t_1)}{a_p} = \frac{10}{23} = 0,77 \text{ s}$

Calcul de  $\gamma(t_1)$  :

Nous avons :  $\dot{\gamma}^2(t_1) = 2a_p(\gamma(t_1) - \gamma(t_0))$

$$\Rightarrow \gamma(t_1) = \gamma(t_0) + \frac{\dot{\gamma}^2(t_1)}{2a_p} = -47 + \frac{100}{2 \times 13} = -43,15^\circ$$

Calcul de  $t_2$  :

L'angle parcouru entre  $t_0$  et  $t_3$  est :

$$\gamma(t_3) - \gamma(t_0) = t_2 \cdot \dot{\gamma}(t_1)$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\gamma(t_3) - \gamma(t_0)}{\dot{\gamma}(t_1)} = \frac{100}{10} = 10s$$

Calcul de  $t_3$  :

$$t_3 = t_2 + t_1 = 10,77s$$

Calcul de  $\gamma(t_2)$  :

Nous avons  $\frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{\gamma}(t_1)$

$$\Rightarrow \gamma(t_2) = (t_2 - t_1)\dot{\gamma}(t_1) + \gamma(t_1)$$

$$\Rightarrow \gamma(t_2) = (10 - 0,77) \times 10 - 43,15 = 49,15^\circ$$

Q5 -

$$\text{Calcul de } t_4 : t_4 = t_3 + 10 = 20,77s$$

$$\text{Calcul de } t_5 : t_5 = \frac{|\dot{\gamma}_G|}{a_p} + t_4 = \frac{30}{13} + 20,77 = 23,07s$$

Q6 - Calcul de  $T_{rp}$ .

à- l'égalité entre la course angulaire de la phase a et celle de la phase b permet d'écrire

$$|\dot{\gamma}_G| \cdot (T_{rp} - (t_5 - t_4)) = \gamma(t_3) - \gamma(t_0)$$

$$\Rightarrow T_{rp} = \frac{\gamma(t_3) - \gamma(t_0)}{|\dot{\gamma}_c|} + (t_5 - t_4) = \frac{100}{30} + 2,3 = 5,63 \text{ s}$$

b-

- Le temps de la phase a est de 10,77s : passage à petite vitesse
- Le temps de la phase b est de 5,63s : passage à grande vitesse

(le temps de retour à grande vitesse < le temps d'allé à petite vitesse)

## Partie III

Q7 – Le seul mouvement autorisé de l'arceau 3 par rapport au bras 2 est la rotation. La liaison équivalente entre l'arceau 3 et le bras 2 est une liaison pivot.

Q8 –

a- La mobilité m

La mobilité utile  $\mu=1$  ( la rotation de 3)

La mobilité interne  $m_i=4$  (les rotations des galets  $G_{17}$ ,  $G_{18}$ ,  $G_{27}$  et  $G_{28}$ )

Donc  $M=5$

b- Le degré d'hyperstatisme h

Inconnus statiques  $I_s=2 \times (6 \times 2 + 2 \times 1 + 10 \times 5) = 128$

Equations statiques  $E_s=6(20+2-1)=126$

Donc  $h=I_s - (E_s - m) = 7$

c- Un guidage hyperstatique est rigide et précis

## Partie IV

Q9 – La courroie est inextensible  $R\omega_{3/2} = R_P\omega_{5/2} \Rightarrow K = \frac{\omega_{3/2}}{\omega_{5/2}} = \frac{R_P}{R} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$

Q10 –

a- La résolution (précision) requise sur la position de l'arbre moteur  $\Delta\theta_{mot}$

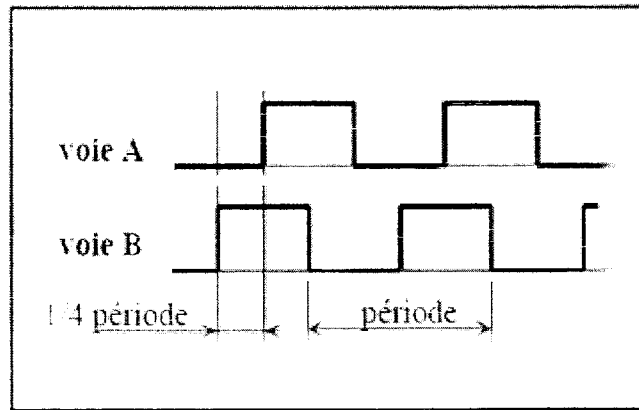
$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\theta_{mot}} = k \cdot \mu \Rightarrow \Delta\theta_{mot} = \frac{\Delta\gamma}{k \cdot \mu} = 24 \times 50 \times 10^{-3} = 1,2^\circ$$

b- Le nombre (résolution du capteur) minimal de traits par tour N que doit posséder le capteur

$$4N = \frac{360}{\Delta\theta_{mot}} \Rightarrow N = 75 \text{ Traits par tour}$$

Le capteur retenu est convenable ( $N=250 > 75$  traits)

Fig.13 - Le signal différentiel généré par le capteur de la rotation dans une application de vitesse de rotation de 1000 trs.min



**Q12** - La fréquence correspondante du signal carré de sortie du capteur  $f_c$

$f_c = N.N_{mot}$  OU  $N_{mot}$  la fréquence du moteur en tours par seconde ( $trs.s^{-1}$ )

$$N_{mot} = \frac{\dot{\gamma}}{k.\mu} = 24 \times 50 \times 30 \times \frac{1}{360} = 100 \text{ trs. s}^{-1}$$

$$f_c = 75 \times 100 = 7500 \text{ Hz}$$

**13** – Chronogramme de la bascule JK

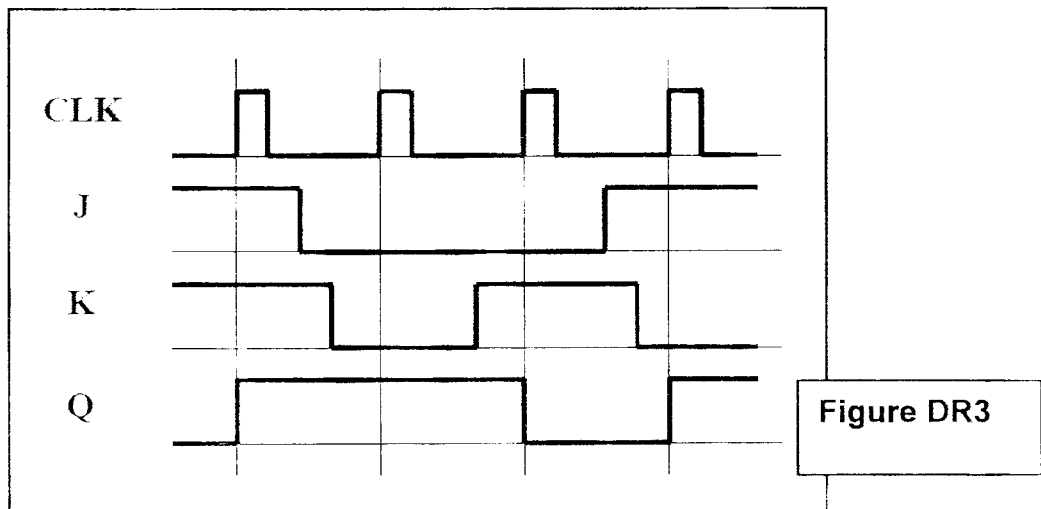


Figure DR3

**Q14 -**

a - Le tableau de Karnaugh donnant  $Q_{n+1}$

JK Q <sub>n</sub> \	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

b - L'expression simplifiée de  $Q_{n+1}$ .

$$Q_{n+1} = J \cdot \bar{Q}_n + \bar{K} Q_n$$

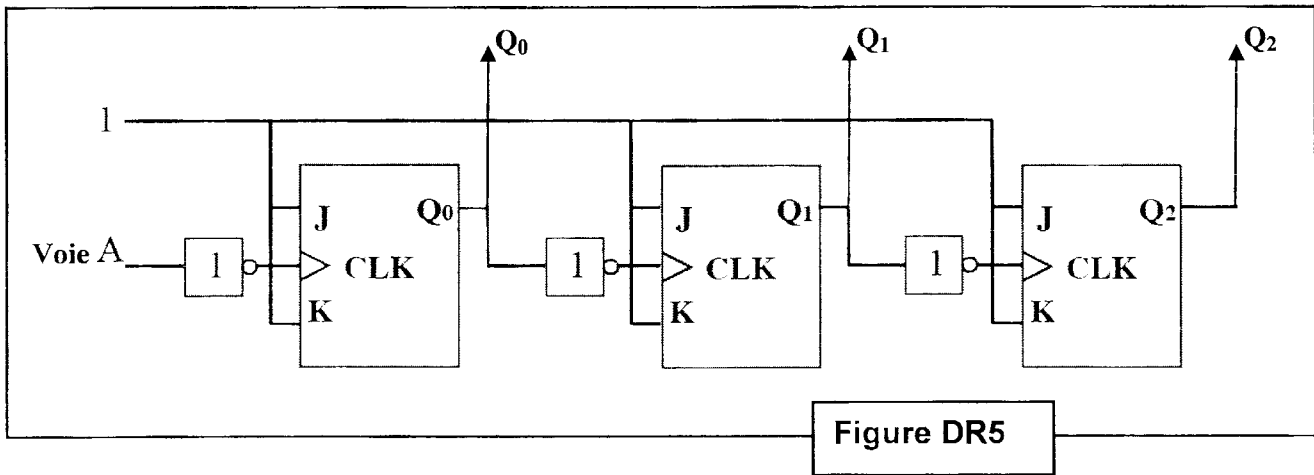
**Figure DR4**

**Q15 -**

Nous avons  $2^{10} = 1024$  états (de 0 à 1023)

10 bascules sont donc nécessaires pour compter de 0 à 1023

**Q16 -** le compteur asynchrone 3bits



**Q17 -** l'homogénéité et la symétrie de 3 permet d'avoir  $x_{G3} = z_{G3} = 0$

L'application du théorème de Guldin permet d'écrire

$$4\pi R^2 = 2\pi \cdot [y_{G3}] \cdot \pi R \implies y_{G3} = -\frac{2R}{\pi}$$

**Q18 -** La matrice d'inertie

$$I(o, S) = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{4}\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{h^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

**Q19** - Le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$  de l'arceau 3 noté  $I_3$

$$I_3 = I_{C1} + I_{C2} + I_{C3} + I_{C4}$$

$I_{C1}$  moment d'inertie du solide C1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$

$$I_{C1} = \rho \pi r H. r^2$$

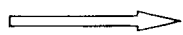
$I_{C2}$  moment d'inertie du solide C2 par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$

$$I_{C2} = \rho \pi R H. R^2$$

$I_{C3}$  moment d'inertie du solide C3 par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$

$I_{C4}$  moment d'inertie du solide C4 par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$

$$I_{C3} = I_{C4} = \rho \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2} \frac{(R^2 + r^2)}{2} = \rho \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$



$$I_3 = \rho \pi \left[ H. (r^3 + R^3) + \frac{(R^4 - r^4)}{2} \right]$$

**Q20** - L'énergie cinétique

a- l'énergie cinétique de l'arceau 3 :

$$\text{Nous avons } T(^3/R_0) = \frac{1}{2} [m_3 \vec{V}_{G3}^2(^3/R_0) + \underbrace{\vec{\Omega}(^3/R_0) \cdot \vec{\sigma}_{G3}(^3/R_0)}_{= A_3 \dot{\gamma}^2}]$$

Or

$$\vec{V}_{G3}(^3/R_0) = [y_{G3} \vec{z}_3 - z_{G3} \vec{y}_3] \dot{\gamma}$$

$$T(^3/R_0) = \frac{1}{2} [m_3 (y_{G3}^2 + z_{G3}^2) + A_3] \dot{\gamma}^2$$

b- l'énergie cinétique du rotor :

$$T(\text{Rotor}/R_0) = \frac{1}{2} I_{\text{rot}} \omega_{\text{rot}}^2$$

c- l'énergie cinétique de la roue 5 et l'ensemble rigidement lié :

$$T(5/R_0) = \frac{1}{2} J_R \omega_{5/2}^2$$

d- l'énergie cinétique de la vis sans fin 4.

$$T(4/R_0) = \frac{1}{2} J_V \omega_{mot}^2$$

e- Expression et calcul de  $J_e$ .

L'équivalence énergétique permet d'écrire

$$T(E/R_0) = T(3/R_0) + T(Rotor/R_0) + T(4/R_0) + T(5/R_0)$$

$$\frac{1}{2} J_e \omega_{mot}^2 = \frac{1}{2} [J_{mot} + J_V + \mu^2 J_R + \mu^2 k^2 (m_3 (y_{G3}^2 + z_{G3}^2) + A_3)] \omega_{mot}^2$$

$$\Rightarrow J_e = J_{mot} + J_V + \mu^2 J_R + \mu^2 k^2 (m_3 (y_{G3}^2 + z_{G3}^2) + A_3)$$

A.N

$$J_e = 7,62 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

Q21 -

**Calcul de la puissance intérieure :  $P_{int}$**

$P_{int} = 0$  les liaisons entre les solides sont parfaites

**Calcul de la puissance extérieure :  $P_{ext}$**

**La puissance de la pesanteur**

$$P(\text{pes} \rightarrow 3/R_0) = -m_3 g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{V}_{G3}(3/R_0)$$

$$\Rightarrow P(\text{pes} \rightarrow 3/R_0) = -m_3 g \cdot \dot{\gamma} [y_{G3} \cos(\gamma) - z_{G3} \sin(\gamma)]$$

**La puissance due à  $C_{mot}$ , au frottement sec et visqueux sur l'arbre moteur**

$$P(C_{mot} \rightarrow rotor/R_0) + P(C_f \rightarrow rotor/R_0) + P(f_{ve} \rightarrow rotor/R_0) \\ = C_{mot} \omega_{mot} - C_r \omega_{mot} - f_{ve} \omega_{mot}^2$$

**Les autres puissances extérieures dues aux liaisons parfaites sont nulles**

**Donc**

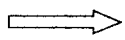
$$P_{ext} = C_{mot} \omega_{mot} - C_r \omega_{mot} - f_{ve} \omega_{mot}^2 - m_3 g \cdot \dot{\gamma} [y_{G3} \cos(\gamma) - z_{G3} \sin(\gamma)]$$



## Q22 – Expression du couple moteur $C_{mot}$

Le T.E.C appliqué à B permet d'écrire :

$$\frac{dT(E/Ro)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$



$$C_{mot} = J_e \dot{\omega}_{mot} + C_r + f_{ve} \omega_{mot} + \mu \cdot k \cdot g \cdot m_3 [y_{G3} \cos(\gamma) - z_{G3} \sin(\gamma)]$$

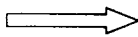
## Q23 – Calcul de $C_{mot}$ à l'instant $t_5$

Tenant compte des données précédentes

Nous avons

$$C_{mot} = J_e \dot{\omega}_{mot} + C_r + f_{ve} \omega_{mot} + \mu \cdot k \cdot g \cdot m_3 [y_{G3} \cos(\gamma) - z_{G3} \sin(\gamma)]$$

Or  $\dot{\omega}_{mot}(t_5) = \frac{\ddot{\gamma}(t_5)}{\mu \cdot k} \cdot \frac{\pi}{180}$  et  $\omega_{mot}(t_5) = \frac{\dot{\gamma}(t_5)}{\mu \cdot k} \cdot \frac{\pi}{180}$



$$C_{mot}(t_5) = -3,68 \text{ N.m}$$

Q24 – La puissance du moteur nécessaire à l'instant  $t_5$ .

$$P_{mot}(t_5) = C_{mot}(t_5) \cdot \omega_{mot}(t_5) = 2,31 \text{ KW}$$

La valeur de cette puissance valide le moteur car  $P_{mot}(t_5) = 2,31 \text{ kw} < 2,7 \text{ kw}$

Q25 –

a-

**Transformée de la place des équations de 1 à 4**

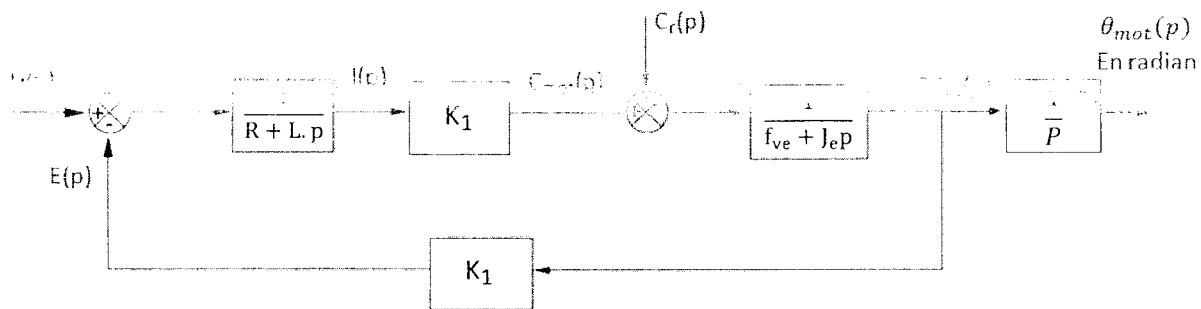
$$C_{mot}(p) = J_e p \Omega_{mot}(p) + f_{ve} \Omega_{mot}(p) + C_r(p) \quad (1)$$

$$U(p) = L \cdot p \cdot I(p) + R \cdot I(p) + E(p) \quad (2)$$

$$E(p) = k_1 \cdot \Omega_{mot}(p) \quad (3)$$

$$C_{mot}(p) = k_2 \cdot I(p) \quad (4)$$

Le schéma bloc associé est donc



b-

Expression de  $H_u(p)$

$$H_u(p) = \left[ \frac{\Omega_{mot}(p)}{U(p)} \right]_{C_r=0} = \frac{k_1}{k_1^2 + Rf_{ve}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ_e}{k_1^2 + Rf_{ve}} p} = \frac{K_u}{1 + T_u p}$$

Avec  $K_u = 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$  et  $T_u = 11,52 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

Expression de  $H_r(p)$

$$H_r(p) = - \left[ \frac{\Omega_{mot}(p)}{C_r(p)} \right]_{U=0} = \frac{1}{f_{ve} + J_e p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_1^2}{R(f_{ve} + J_e p)}}$$

$$H_r(p) = \frac{R}{k_1^2 + Rf_{ve}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ_e}{k_1^2 + Rf_{ve}} p} = \frac{K_r}{1 + T_u p}$$

Avec  $K_r = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} / \text{N.m}$

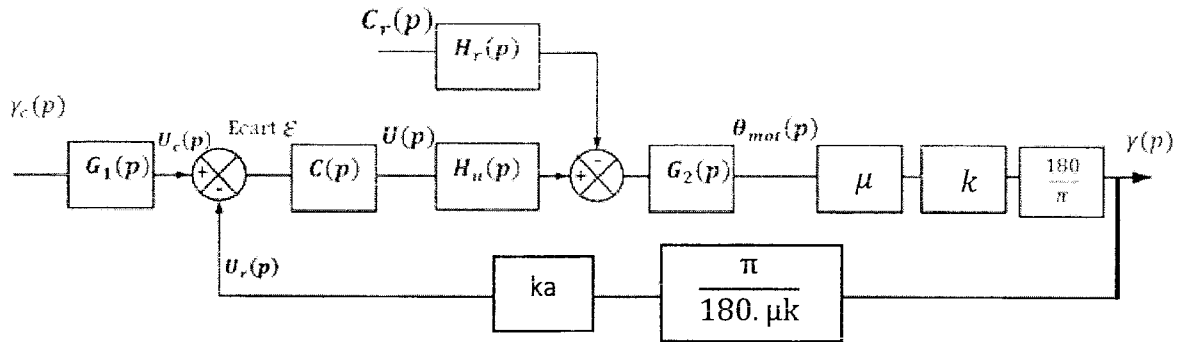
Q26 -

a-  $G_3(p) = \mu$  : Réducteur roue et vis sans fin.

$G_4(p) = k$  : Transmission par courroie crantée.

b- Détermination de  $G_1(p)$ .

Le schéma bloc peut se mettre sous la forme suivante :



Pour que l'image en tension associée à la valeur de la position angulaire mesurée par le capteur soit identique à l'image en tension associée à la valeur de la position angulaire délivrée par l'adaptateur (Si  $\gamma = \gamma_c$ ), on prend :

$$G_1(p) = \frac{\pi \cdot ka}{180 \cdot \mu \cdot k}$$

Q27 –

a- Expression de la FTBO notée  $T(p)$ .

$$T(p) = C(p)H_u(p) \frac{1}{p} ka$$

$$\Rightarrow T(p) = \frac{k_u \cdot ka}{p(1+T_u p)} = \frac{1}{p(1+T_u p)}$$

b- La stabilité du système est assurée, l'ordre de la FTBO est  $n-2$ .

Q28 –

a- Calcul de  $\epsilon_s$  :  $\gamma_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{U_c(p)}{1 + FTBO} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{G_1(p)\gamma_c(p)}{1 + T(p)} = 0$$

Le cahier des charges est respecté

b- Calcul de  $\epsilon_{sp}$  :  $C_r(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_{sp} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{H_u(p)} \frac{FTBO}{1 + FTBO} H_r(p) C_r(p) = \frac{k_r}{k_u} \neq 0$$

Le cahier des charges n'est pas respecté.

Q29 -

a- Calcul de  $\varepsilon_T$  :  $\gamma_c(p) = \frac{\gamma_0}{p^2}$

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{U_c(p)}{1 + FTBO} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{G_1(p) \gamma_c(p)}{1 + T(p)} = \frac{\pi \gamma_0}{180 \cdot \mu \cdot k \cdot k_u} \neq 0$$

Le cahier des charges n'est pas respecté.

b- Pour respecter le cahier des charges en terme de précision on introduit une integration

Le correcteur a, donc, la forme :  $C(p) = \frac{1}{p}$

En effet la nouvelle expression de la FTBO est :  $T(p) = \frac{k_u \cdot k_a}{p^2(1+T_u p)} = \frac{1}{p^2(1+T_u p)}$

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{U_c(p)}{1+FTBO} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{G_1(p) \gamma_c(p)}{1+T(p)} = 0$$

c- Calcul de  $\varepsilon_{sp}$  :

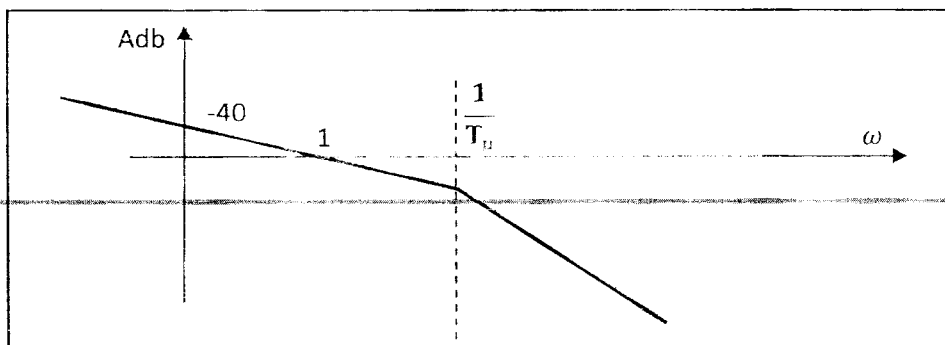
$$\varepsilon_{sp} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{C(p) \cdot H_u(p)} \frac{FTBO}{1+FTBO} H_r(p) C_r(p) = 0$$

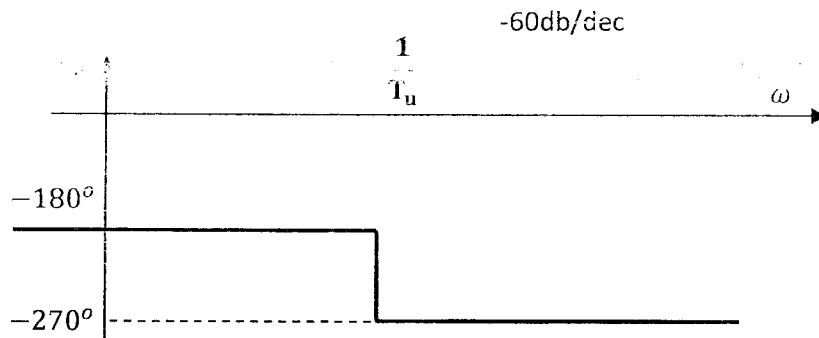
Le cahier des charges est respecté

d- Stabilité du système :

La FTBO est  $T(p) = \frac{1}{p^2(1+T_u p)}$

Le Diagramme de Bode associé est :

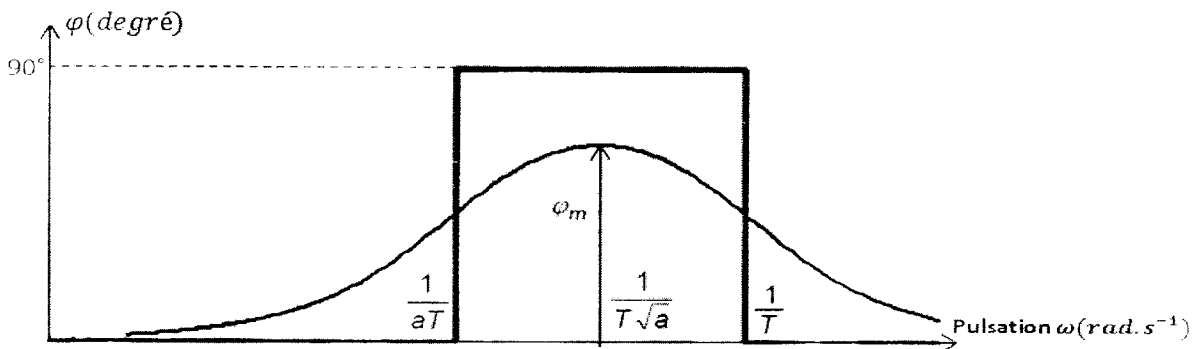
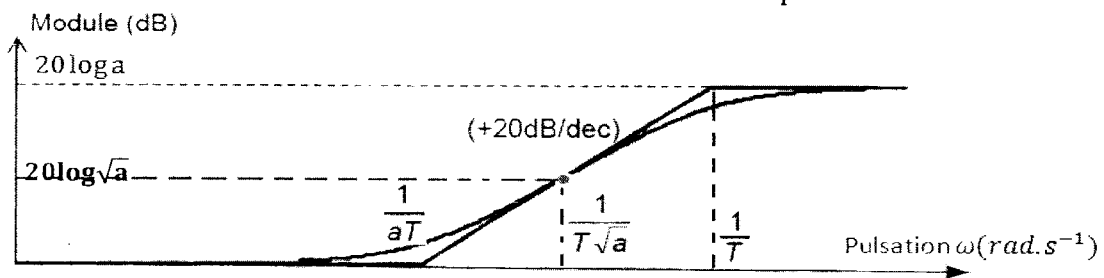




Les asymptotes de la phase sont en dessous de -180°, le système est **instable**

**Q30 –**

a. Le diagramme de Bode de  $C_1(p)$  pour  $K_c=1$  :  $C_1(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$  avec  $a > 1$



b. Action du correcteur

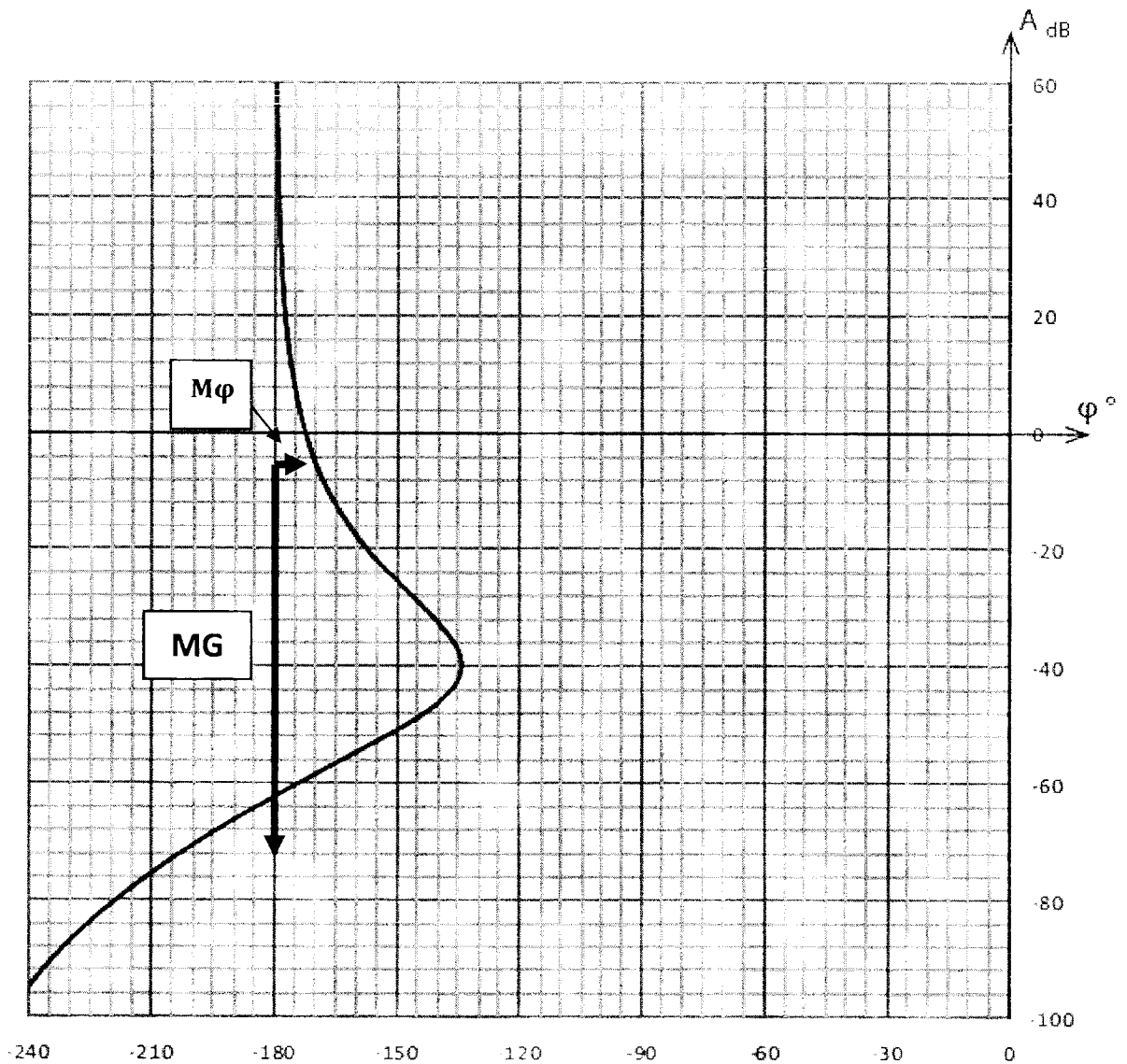
la classe de la nouvelle FTBO n'est pas modifiée par ce correcteur la précision ne sera, donc, pas modifiée. La forme du lieu de bode de ce correcteur fait apparaître clairement l'action locale qu'aura celui-ci sur la FTBO et qui permet de rendre le système stable.

	Stabilité	Précision
Le correcteur $C_1(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ avec $a > 1$	amplifie	N'affecte pas

Q31 -

La marge de gain  $MG = 12,26$

La marge de phase  $M\phi = 7,5^\circ$



- b- A partir du document réponse on constate que, pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ , il faut déplacer le lieu de black verticalement de 40db.

Nous avons donc  $20 \cdot \log K_c = 40$

$\Rightarrow K_c = 100$

Dans ce cas la marge de gain est  $MG=22^\circ$

Ainsi le cahier des charges est respecté.

**fin du corrigé**